TD : Optique physique. (1)

Rappel :

• Une onde éléctromagnétique est l'ensemble d'un champ élec $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{H}$.

• L'application de $\vec{E}$ dans un millieu provoque un déplacemant électrique (induction) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
ε → permetivité éléct

• L'application d'un champ magnétique $\vec{H}$ produit une induction magnétique $\vec{B} = \mu \vec{H}$
μ → perneabilité

• Ces 4 vecteurs sont reliés par les equation de Maxwell :

* $\text{Div}\,\vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ → densité de charge
* $\text{Div}\,\vec{B} = 0$
* $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
* $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\vec{J}$ → densité de courant

Série n° : 1

La notation complexe de $\vec{E}$ est donnée par

$$\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(\omega t - \varphi)} = \vec{\mathcal{E}} e^{i\omega t} \quad \text{avec } \vec{\mathcal{E}} = \vec{E_0} e^{-i\varphi}$$

a) - que devient l'operateur $\frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega E_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = i\omega \vec{E} \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} = i\omega}$$

Millieu diéléctrique (les charges ne peut pas ce deplacer) pas de charge en mouvement capable de ce déplacer ($\rho = 0$; $\vec{J} = \vec{0}$)

(1) * $\text{Div } \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$

(2) * $\text{Div } \vec{B} = 0$

(3) * $\vec{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$

(4) * $\vec{\text{rot}}\ \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 + i\omega \vec{D}$

On a $\mu \varepsilon v^2 = 1$

$$(4) \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu} = i\omega \vec{D} = i\omega \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = i\omega \mu \varepsilon \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{i\omega}{v^2} \vec{E}}$$

2) - On considére une onde sinusuidale dont les champs sont donnés par :

$$\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})} \qquad \vec{B} = \vec{B_0} e^{i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})}$$

- $\vec{K}$: vecteur d'onde $= \begin{cases} K_x \\ K_y \\ K_z \end{cases}$

- $\vec{r}$: position $= \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

a) que devient l'operateur $\vec{\nabla}$ de cette onde :

$$\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i(\omega t - K_x x - K_y y - K_z z)}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} . \begin{cases} E_x \\ \vec{E_y} \\ E_z \end{cases} = -i \left[K_x + K_y + K_z \right] \vec{E_0}\, e^{i(\omega t - (K_x + K_y + K_z))}$$

$$= -i \left[K_x E_0 e^{(i(\omega t - K_x x)} + K_y E_y + K_z E_z \right] = -i \vec{K}.\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = -i \vec{K}.\vec{E} \implies \boxed{\vec{\nabla} = -i \vec{K}}$$

b/ que devient les équations de Maxwell dans un millieu diélectrique ($\rho = 0$; $\vec{j} = \vec{0}$)

(1) . $\mathrm{Div}\,\vec{D} = \vec{\nabla}.\vec{D} = -i\vec{K}.\vec{D} = 0 = -\varepsilon i \vec{K}.\vec{E} = 0$

$\implies \vec{K}.\vec{E} = 0 \implies \boxed{\vec{K} \perp \vec{E}}$

~~. $\mathrm{Div}\,\vec{B} = \vec{0}$~~

~~. $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\vec{K} \wedge \vec{E}$~~

(2). $\mathrm{Div}\,\vec{B} = 0 \implies \vec{\nabla}.\vec{B} = -i\vec{K}.\vec{B} = 0 \implies \vec{K} \perp \vec{B}$

(3). $\mathrm{Rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -i\omega\vec{B}$ (1')

$\vec{B}$

$\vec{r} \quad -i\vec{K} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B} \implies \boxed{\vec{K} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}} \implies \begin{cases} \vec{B} \perp \vec{K} \\ \vec{B} \perp \vec{E} \end{cases}$

(4) $\text{rot}\vec{H} = \nabla \wedge \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$= \frac{-i\vec{K} \wedge \vec{B}}{\mu} = i\omega \varepsilon \vec{E}$$ (2)

$$\vec{K} \wedge \vec{B} = -\omega \mu \varepsilon \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{K} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{v^2} \vec{E}}$$ (2')

en prenant le module de (1') et (2')

On obtient $KE = \omega B$, $KB = \frac{\omega}{v^2} E$ } $E = vB$

$$\frac{E}{B} = \frac{vB}{v^2 E} \Rightarrow E^2 =$$

c) equation de propagation:

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = -i\vec{K} \cdot (-i\vec{K}) = -K^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} i\omega = i\omega \times i\omega = -i\omega^2$$

$$-K^2 - \frac{1}{v^2}(-\omega^2) = 0 \qquad \omega^2 = K^2 v^2$$

$$\boxed{\omega = \pm K v}$$

(+) Onde progressive est une onde qui avance dans l'espace

(−) Onde regressive

Scanned by CamScanner

3°) En appliquant

$$\operatorname{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}.\vec{rot}\,\vec{A} - \vec{A}.\vec{rot}\,\vec{B}$$

~~En appliquant~~ à $\vec{E}$ et $\vec{H}$, écrire l'eq de propagation de l'energie

$$\operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{H}) = \vec{H}.\vec{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\vec{rot}\,\vec{H}$$

Rappel

dans une onde électromagnétique il n'y a pas le déplacement de la matière mais un transport d'énergie

eq local de Poynting :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{P} = -j.\vec{E} = 0 \text{ (si M. diélectrique)}$$

$\vec{P}$: vecteur de Poynting ; $\vec{P} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu} = \vec{E}\wedge\vec{H}$

$$\vec{P} = \vec{E}\wedge\vec{H}$$

$$\operatorname{Div}\vec{P} = \operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{H})$$

$$= \vec{H}\,\vec{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\vec{rot}\,\vec{H} = -H\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - E\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$= -\mu\,\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\,\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu\frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial E^2}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2 + \frac{1}{2}\varepsilon E^2\right) = -\frac{\partial}{\partial t}[w]$$

avec $W = \frac{1}{2}\mu H^2 + \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

↳ est l'energie électromag

* Exercice II :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = -\frac{\sqrt{6}}{4} E_0 \cos 2\pi \left(5.10^{14} t - \frac{10^7}{12}(x + \sqrt{3} y)\right) \\ E_y = \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 \cos 2\pi (\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}) \\ E_z = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos 2\pi (\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}) \end{cases}$$

$\vec{E} = \vec{E_0} \cos(\omega t - \vec{K}.\vec{r})$ $\quad \vec{K} \begin{cases} K_x \\ K_y \\ K_z \end{cases} \quad \vec{r} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

$\vec{K}.\vec{r} = x K_x + y K_y + z K_z$

$\vec{K} = \frac{2\pi . 10^7}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

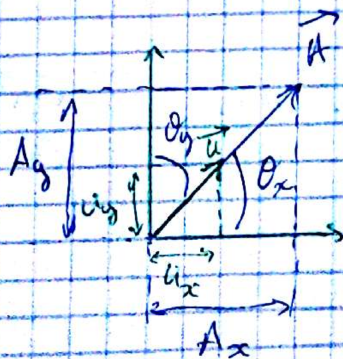
* la pulsation : $\omega = 2\pi \times 5.10^{14} = \pi \times 10^{15} (s^{-1})$

* la période : $\omega = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi . 10^{15}} = 2.10^{-15} s$

Rappel :

Cosinus directeurs d'1 vecteur :

$\vec{A} = \begin{cases} A_x \\ A_y \\ A_z \end{cases} = |A| \vec{u} = |A| \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_z \end{cases}$



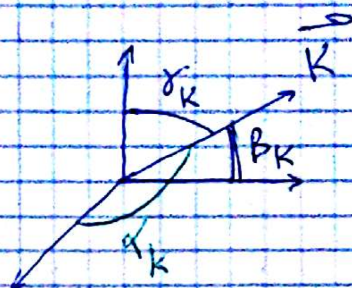
• $\cos\theta_x = \frac{u_x}{|u|} = \frac{u_x}{1} = \frac{A_x}{|A|}$

$\Rightarrow u_x = \cos\theta_x = \frac{A_x}{|A|} \Rightarrow$ Cosinus directeur de A suivant Ox

• $\cos\theta_y = \frac{u_y}{1} = \frac{A_y}{|A|} \Rightarrow$ " " Oy

Donc $\cos\theta_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$; $\cos\theta_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$; $\cos\theta_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$

$$\vec{K} = \frac{2\pi \cdot 10^7}{12} \begin{cases} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{cases} \qquad |\vec{K}| = \frac{\pi}{3} \cdot 10^7$$



- $\cos \alpha_K = \dfrac{\frac{\pi \cdot 10^7}{6}}{\frac{\pi}{3} \cdot 10^7} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_K = 60°}$

- $\cos \beta_K = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \beta_K = 30°$ $\qquad \dfrac{\frac{2\pi \cdot \sqrt{3} \cdot 10^7}{12}}{\frac{\pi}{3} \cdot 10^7} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos \gamma_K = 0 \longrightarrow \boxed{\gamma_K = \frac{\pi}{2}}$

b/ - La longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{|\vec{K}|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3} \cdot 10^7} = \boxed{6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}$$

* nbre d'onde $\sigma = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{10^7}{6}\ (m^{-1})$

* Vecteur d'onde $\vec{K} = |K|\,\vec{u} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

2/ La relation qui lie les cosinus directeurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{Rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = |A|\,\vec{u} = |A| \begin{cases} u_x = \cos\theta_x \\ u_y = \cos\theta_y \\ u_z = \cos\theta_z \end{cases} = \begin{cases} |\vec{A}| \cos\theta_x \\ |\vec{A}| \cos\theta_y \\ |\vec{A}| \cos\theta_z \end{cases}$$

$$\vec{K} = \begin{cases} |\vec{K}| \cos\alpha_K \\ |\vec{K}| \cos\beta_K \\ |\vec{K}| \cos\gamma_K \end{cases} \qquad \vec{E} = \begin{cases} |\vec{E}| \cos\alpha_E \\ |\vec{E}| \cos\beta_E \\ |\vec{E}| \cos\gamma_E \end{cases} \qquad \vec{B} = \begin{cases} |\vec{B}| \cos\alpha_B \\ |\vec{B}| \cos\beta_B \\ |\vec{B}| \cos\gamma_B \end{cases}$$

⑥

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-i\vec{K} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Longrightarrow \vec{K} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$|\vec{K}||\vec{E_0}| \begin{vmatrix} \cos\alpha_K \\ \cos\beta_K \\ \cos\gamma_K \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \cos\alpha_E \\ \cos\beta_E \\ \cos\gamma_E \end{vmatrix} = \omega B_0 \begin{vmatrix} \cos\alpha_B \\ \cos\beta_B \\ \cos\gamma_B \end{vmatrix}$$

avec $\left(\vec{K} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad |\vec{K} \wedge \vec{E}| = |\omega \vec{B}| \Rightarrow KE = \omega B \right.$
en amplitude $\left. K E_0 = \omega B_0 \right)$

D'où
$$\begin{cases} \cos\alpha_B = \cos\beta_K \cos\gamma_E - \cos\gamma_K \cos\beta_E \\ \cos\beta_B = \cos\gamma_K \cos\alpha_E - \cos\alpha_K \cos\gamma_E \\ \cos\gamma_B = \cos\alpha_K \cos\beta_E - \cos\beta_K \cos\alpha_E \end{cases}$$

Donc $\Rightarrow$ $\cos\alpha_B = \frac{\sqrt{6}}{4}$; $\cos\beta_B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\cos\gamma_B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\vec{B} = |B| \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

* Exercice III : $\vec{u} \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{cases} \longrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 1}$

1/ a- La longeur d'onde λ_0 de l'onde :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{|\vec{K}|} = \frac{2\pi}{K_0} = \frac{2\pi}{10{,}5} \cdot 10^{-6}\, m = 0{,}598\, \mu m$$

$\mu = 10^{-6}$

$$|\vec{K}| = K_0 \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = K_0$$

b- La Periode T :

$$x = v.t \rightsquigarrow \lambda = vT = C.T \Rightarrow T = \frac{\lambda}{C} = \frac{0{,}598 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{8}}$$

$$\boxed{T \simeq 0{,}17 \cdot 10^{-14}\ s}$$

c – L'angle θ :

$$\vec{K} = \begin{cases} K_x \\ K_y \\ K_z \end{cases} = |K| \begin{cases} u_x = \cos\theta_x \\ u_y = \cos\theta_y \\ u_z = \cos\theta_z \end{cases}$$

$$\cos\theta_z = \frac{K_z}{|K|} = \frac{K_0/\sqrt{3}}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta_z \simeq 54{,}75°$$

2 – $\text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow -i\vec{K}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{K}\cdot\vec{E} = 0$

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\vec{K}\vec{r} - \omega t)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{K} = K_0 \begin{cases} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\vec{K}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}} + \frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\alpha = -\beta}$$

avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

3 –

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega}\,\vec{k} \wedge \vec{E}}$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} K_0 \frac{E_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{K_0 E_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{K_0 E_0}{\omega} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \end{vmatrix} = \frac{E_0}{c} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

4 – $\vec{P}$?

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \begin{cases} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{cases} e^{2il}$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{12}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} \end{cases} e^{2i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \frac{2}{\sqrt{12}} \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} e^{2i(\vec{k_0}\vec{r} - \omega t)}$$

* Exercice V :

Rappel:

On sait que $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$

$$|K|\vec{e_z} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \Longrightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e_z} \wedge \vec{E}$$

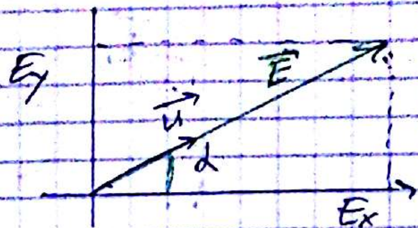
* On appele le plan de polarisation de OE le plan formet par : Former par $\vec{K}$ et $\vec{E}$ ($\vec{e_z}$ et $\vec{E}$).

• On appele direction de polari la direction prise par $\vec{E}$ dans le plans. ⊥ à z, E peut d'écrir soit une direction lineare, circulaire ou elleptique.

1°)

$$\vec{E_0} = \begin{vmatrix} E_0 \cos(\alpha)\cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\alpha)\cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix} = E_0 \cos(\omega t - kz) \overbrace{\begin{cases} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{cases}}^{\vec{u}}$$

• $\vec{u}$ prend une direction fixe porté par $\vec{u}$ ⟹ pol. linéaire



le champ prend une direction fixe (dirigé par $\vec{E_1}$) la pola est donc linéaire.

b-

$$\vec{E_1} = \begin{vmatrix} E_1 \cos(wt - kz) \\ E_1 \sin(wt - kz) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_x}{E_1} &= \cos(wt - kz) \\ \frac{E_y}{E_1} &= \sin(wt - kz) \end{aligned}\right\} \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_1}\right)^2 = 1 \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_1^2$$

les composent de E décrit un cercl ⇒ c'est polri cerculaire

c-

$$\vec{E_2} = \begin{vmatrix} E_2 \cos(wt - kz) = E_x \\ -E_2 \sin(wt - kz) = E_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_x}{E_2} &= \cos(wt - kz) \\ \frac{E_y}{E_2} &= -\sin(wt - kz) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{E_x}{E_2}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1$$ cerculaire

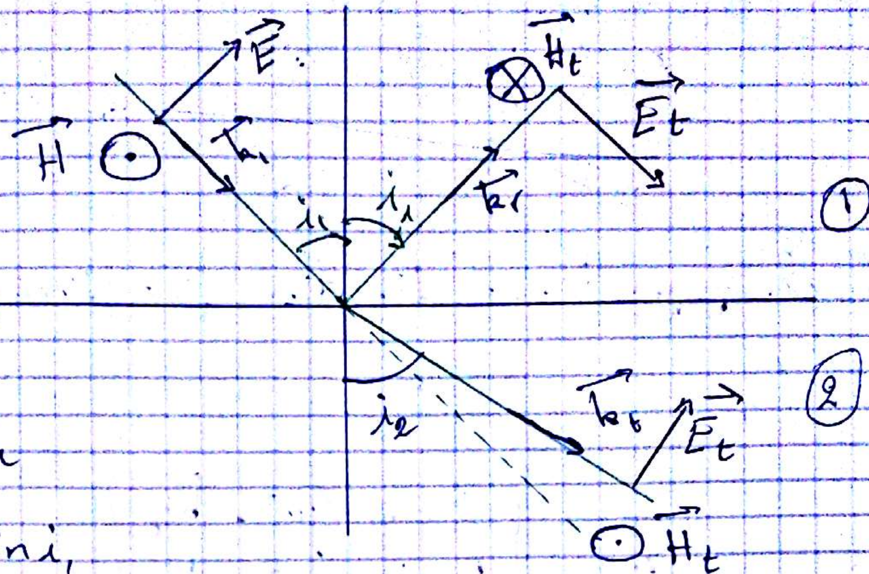
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \begin{vmatrix} 2 E_1 \cos(wt - kz) = E_x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\vec{E} = |E| \, \vec{e_x}} \Longrightarrow$

donc pol. linéaire.

* Exercice VI :

10



$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$

$n_1 > n_2 \Rightarrow i_2 > i_1$

Direction de $\vec{H}$: $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\mu\omega}}$

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

$\vec{K} = \begin{cases} K_x \\ 0 \\ K_z \end{cases} \;;\; \vec{r} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \qquad \vec{K}.\vec{r} = K_x x + K_z z$

$\Rightarrow (xoz)$

- le plan d'incidence = c'est le plan qui contient le rayon (le tableau)
- l'onde ($\vec{E}$) est polariser (//) au plan d'incidence
- le plan de séparation = est xOy

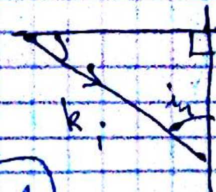
$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k_x x)}$ au plan de séparation $(z=0)$

- Conditions aux limites : (2) relation

$\vec{E}_1(T) = \vec{E}_2(T)$ et $\vec{H}_1(T) = \vec{H}_2(T)$

- coef de reflexion : $r = \frac{E_r}{E_i}$ $t = \frac{E_t}{E_i}$
- " de trans : ⟶

$$K_x \begin{cases} K_{xi} = K_i \cos(\frac{\pi}{2} - i) = K_i \sin i \\ K_{xr} = K_r \sin i \\ K_{xt} = K_t \sin r \end{cases}$$



(11)

* au plan de séparation ($z = 0$):

$\vec{E_1}(T) = \vec{E_2}(T)$ $E_{//}$ E_r

→ suivant Ox :

$\Rightarrow E_{0i} \cos i \, e^{i(\omega t - k_i \sin i x)} + E_{0r} \cos i \, e^{i(\omega t - k_r \sin i x)}$

$= E_{0t} \cos r \, e^{i(\omega t - k_t \sin r x)}$ → E_t

On divise sur $(E_{0i} \cos i \, e^{i(\omega t - k_i \sin i x)})$

$\Rightarrow$ (1) $\boxed{1 + r_{//} = \frac{\cos r}{\cos i} t_{//}}$ avec $r_{//} = \frac{E_r}{E_i}$; $t_{//} = \frac{E_t}{E_i}$

coef de trans $\boxed{t = \frac{E_t}{E_i}}$; $r = \frac{E_r}{E_i}$; $t_{//} = \frac{E_t}{E_i}$

→ pour $H \Rightarrow$ &.

⇒ Suivant Oy :

$z = 0$, $\vec{H_1}(T) = \vec{H_2}(T)$

On projette suivant oy :

$(*)$ $\underbrace{H_{0i} e^{i(\omega t - k_i \sin i x)}}_{H_i} + \underbrace{H_{0r} e^{i(\omega t - k_r \sin i x)}}_{H_r} = \underbrace{H_{0t} e^{i(\omega t - k_t \sin i x)}}_{H_t}$

On divise par $(H_{0i} e^{i(\omega t - k_i \sin i x)})$:

μ = Milieu Magnétique

$\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow -i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \mu_0 \vec{H}$

$|\vec{B}| = \frac{|\vec{k} \wedge \vec{E}|}{\omega} = |\mu_0 \vec{H}| \Rightarrow B = \frac{k}{\omega} E = \mu_0 H$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\lambda = VT$; $n = \frac{c}{V}$

$\Rightarrow H = \frac{E}{\mu_0 V} \Rightarrow \boxed{H = \frac{E}{\mu_0 c} n}$ $(**)$

(*) et (* *) donne $\boxed{1 - r_{//} = \frac{n_2}{n_1} t_{//}}$ i

12

$$1 + r_{//} = \frac{\cos r}{\cos i} t_{//} \quad ii$$

(ii) − (i) $\quad 1 + r_{//} - 1 + r_{//} = \frac{\cos r}{\cos i} t_{//} - \frac{n_2}{n_1} t_{//}$

$$2 r_{//} = \left(\frac{\cos r}{\cos i} - \frac{n_2}{n_1}\right) t_{//} \Rightarrow t_{//} = 2 r_{//} \left(\frac{\cos i \times n_1}{n_1 \cos r - n_2 \cos i}\right)$$

(ii) + (i) $\quad 1 + r_{//} + 1 - r_{//} = \frac{\cos r}{\cos i} t_{//} + \frac{n_2}{n_1} t_{//}$

$$2 = \left(\frac{n_1 \cos r + n_2 \cos i}{n_1 \cos i}\right) t_{//} \Rightarrow \boxed{t_{//} = \frac{2 n_1 \cos i}{n_1 \cos r + n_2 \cos i}}$$

$$r_{//} = \frac{n_1 \cos r - n_2 \cos i}{n_1 \cos r + n_2 \cos i}$$

4/ pour $r_{//} = 0$:

$$(n_1 \cos r)^2 = (n_2 \cos i_B)^2 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos r}{\cos i}$$

$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i}{\sin r}$ $\quad n_1 \sin i = n_2 \sin r$

$\sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i$

~~$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\sin i}{\sin r}$~~

$$\Rightarrow \quad n_1^2 [1 - \sin^2 r] = n_2^2 [1 - \sin^2 i_B] \quad n_2^2 \cos^2 i_B$$

$$n_1^2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_B\right] = n_2^2 [1 - \sin^2 i_B] \quad n_2^2 \cos^2 i_B$$

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} = X \qquad 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos^2 i_B$$

$$1 - X^2 \sin^2 i_B = \frac{1}{X^2} \cos^2 i_B$$

$$\cos^2 i_B + \sin^2 i_B - X^2 \sin^2 i_B = \frac{1}{X^2} \cos^2 i_B$$

Université Mohamed 1er
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année universitaire 2016-17
Section SM (S4)
TD d'Optique Physique

Série n° 1

Exercice I :

La notation complexe permet de représenter des champs à variation sinusoïdale par des expressions complexes telles que :

$\vec{E} = \vec{E}_o\, e^{i(\omega t-\varphi)} = \vec{\in} e^{i\omega t}$ où $\vec{\in} = \vec{E}_o\, e^{-i\varphi}$ est l'amplitude complexe du champ.

1- Que devient l'opérateur $\partial / \partial t$ avec cette notation, et sous quelle forme peut-on écrire les équations de Maxwell des champs complexes.

2- On considère l'onde sinusoïdale dont les champs ont pour expressions :

$$\vec{E} = \vec{E}_o\, e^{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})} \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_o\, e^{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})}$$

a- Que devient l'opérateur $\vec{\nabla}$ pour cette onde.

b- On considère un milieu diélectrique homogène, linéaire et isotrope. Montrer que dans ce milieu, les équations de Maxwell s'écrivent sous forme de produit de vecteurs dont on peut facilement déduire l'orientation des champs.

c- Que devient alors l'équation de propagation.

3- Soit la relation suivante: $\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\vec{B}$.

En appliquant la relation ci-dessus à $\vec{E}$ et $\vec{H}$, écrire l'équation de propagation de l'énergie.

Exercice II:

On considère dans le vide, l'onde électromagnétique lumineuse suivante:

$$E_x = -\frac{\sqrt{6}}{4} E_0 \cos 2\pi \left[5.10^{14} t - \frac{1}{12} 10^7 (x + \sqrt{3} y)\right];\quad E_y = \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 \cos 2\pi \left[5.10^{14} t - \frac{1}{12} 10^7 (x + \sqrt{3} y)\right]$$

$$E_z = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos 2\pi \left[5.10^{14} t - \frac{1}{12} 10^7 (x + \sqrt{3} y)\right]$$

1- Déterminer pour cette onde:

a- sa période , sa pulsation et les cosinus directeurs de sa direction de propagation.

b- Sa longueur d'onde, son nombre d'onde et les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$.

2- A partir de l'équation $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, déterminer la relation qui lie les cosinus directeurs de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, et décrire $\vec{B}$.

Exercice III : (Tiré de l'Examen ordinaire 2009-10)

Dans le vide rapporté au trièdre Oxyz, soit une onde électromagnétique supposée plane monochromatique de champ électrique :

$\vec{E} = E_0\, e^{j(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)}.\vec{u}$ avec et $\vec{k} = k_0 \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{vmatrix}$ avec $k_0 = 10.5\ 10^6 m^{-1}$ $\quad \vec{u} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{vmatrix}$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

1- Calculer :

a- la longueur d'onde λ_0 de l'onde,

b- la période T,

c- l'angle θ entre la direction de propagation et l'axe oz.

2- En tenant compte de l'orientation de $\vec{k}$ par rapport à $\vec{E}$, calculer les valeurs de α et β.

3- Calculer l'induction $\vec{B}$ et en déduire le champ magnétique $\vec{H}$.

4- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{P}$.

Exercice IV :(☹Facultatif) (Tiré de l'Examen Ordinaire 2014-15)

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide est décrite par son induction magnétique $\vec{B} = \vec{B}_O e^{i(5.10^{14}t - \frac{1}{6}.10^7 z)}$ prise parallèle à l'axe (Ox) d'un repère(Oxyz).

1- Trouver la période T, la longueur d'onde λ et la direction de propagation de cette onde.

2- Calculer le champ électrique de cette onde.

Exercice V :

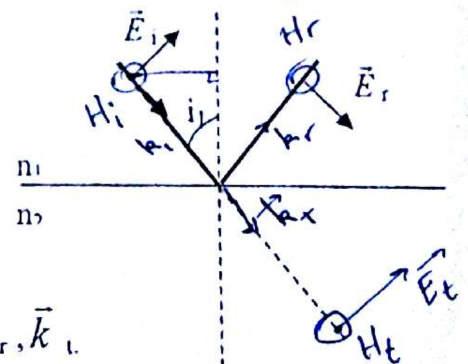
1- Décrire l'état de polarisation de chacune des 3 ondes représentées par les champs électriques suivants :

a- $\vec{E}_0 = \begin{vmatrix} E_0\cos(\alpha)\cos(\omega t - k.z) \\ E_0\sin(\alpha)\cos(\omega t - k.z) \\ 0 \end{vmatrix}$, b- $\vec{E}_1 = \begin{vmatrix} E_1\cos(\omega t - k.z) \\ E_1\sin(\omega t - k.z) \\ 0 \end{vmatrix}$ c- $\vec{E}_2 = \begin{vmatrix} E_2\cos(\omega(t - \frac{z}{c})) \\ -E_2\sin(\omega(t - \frac{z}{c})) \\ 0 \end{vmatrix}$

2- Quel est l'état de polarisation de l'onde dont le champ électrique est $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ en supposant $E_1=E_2$.

Exercice VI : (Tiré de l'Examen de rattrapage 2014-15)

On considère le schéma représentant la réflexion et la réfraction d'une onde plane à la surface de séparation de deux milieux diélectriques d'indices n_1 et n_2 (avec $n_1 > n_2$). Le champ électrique de l'onde incidente se propageant dans le milieu 1, est parallèle au plan d'incidence.



1- Compléter le schéma ci-contre en disposant les différents champs électriques $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ $\vec{E}_t$, les champs magnétiques $\vec{H}_i$, $\vec{H}_r$ $\vec{H}_t$ ainsi que les vecteurs d'onde $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$, $\vec{k}_t$.

2- A partir des conditions aux limites, montrer que les coefficients de réflexion et de transmission sont reliés par les relations suivantes:

$$1 + r_{//} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1}.\ t_{//} \quad \text{et} \quad 1 - r_{//} = \frac{n_2}{n_1}.\ t_{//}$$

3- En déduire les expressions des coefficients de réflexion et de transmission.

4- Montrer que l'angle d'incidence de Brewster, pour lequel $r_{//}=0$, est donné par:

$$tg(i_B) = n_2/n_1$$